Processamento Digital de Imagens: Teoria da Amostragem e Efeitos de Bordas na Convolução Discreta

Prof. Dr. Eng. Nícolas de Araújo Moreira

[1]Departamento de Engenharia de Teleinformática
Centro de Tecnologia
Campus do Pici
Universidade Federal do Ceará

Fortaleza, 26 de Agosto de 2020.

Sumário

- Contextualização;
- Convolução Discreta 2D, suas propriedades e aplicações;
- Bordas e Gradientes;
- Filtros de Diferenças Finitas (Gradientes): Roberts, Prewitt, Sobel, Detector de Bordas de Canny.

Introdução - Motivação e Objetivos: Detecção de Descontinuidades

- **Detecção de formas**: pontos, bordas, linhas, etc.
- Metodologia tradicional: convolução da imagem com filtro;
- Em geral, uma filtragem linear de uma imagem $N \times M$ por um filtro de tamanho $n \times m$ é dada pela aplicação da seguinte fórmula em cada pixel da imagem:

$$f(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{s=-b}^{b} g(s, t) I(x + s, y + t) \tag{1}$$

Onde:

- $f(x, y)$ é a imagem filtrada;
- $I(x, y)$ é a imagem original;
- $g(s, t)$ são os coeficientes do filtro.

- O processo de aplicar esta fórmula é chamado de **convolução**!

Convolução Discreta 2D

Convolução de duas funções contínuas:

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)h(x-\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{2}$$

Convolução discreta:

$$f[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]h[n-m] \tag{3}$$

Convolução discreta 2D:

$$f[n_1, n_2] * *h[n_1, n_2] = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f[n_1, n_2]h[n_1 - m_1, n_2 - m_2] \tag{4}$$

- **Comutatividade**: $f * h = h * f$;
- **Associatividade** (podemos aplicar diversos filtros um após o outro): *$f * (g * h) = (f * g) * h$;
- **Distributividade** com relação à adição: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$;
- $\mathcal{F}\{f(x) * h(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{h(x)\}$ e $\mathcal{F}\{f(x)h(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} * \mathcal{F}\{h(x)\}$, onde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ denota a Transformada de Fourier;
- A operação de convolução aplicada em conjunto com Delta de Dirac $(f(x) * \delta(x))$ realiza uma função de **amostragem** de um ponto individual.
- **A demonstração destas propriedades fica como exercício para casa!**

Convolução Discreta 2D: Aplicações - Filtragem no Domínio Espacial

- Em processamento de imagens, um **kernel**, **matriz de convolução** ou **máscara** é uma matriz de pequenas dimensões usadas para, por exemplo, **detecção de bordas**. Isto é obtido por meio da convolução entre o kernel e a imagem;
- Em um **filtro linear**, cada pixel é substituído pela combinação linear de seus vizinhos;
- Assim, a filtragem no domínio espacial pode ser definida como a resposta da aplicação de uma máscara em todos os pontos da imagem;
- Propriedades de um filtro linear:
  - Linearidade;
  - Invariante ao deslocamento;
  - **Todo operador linear invariante a deslocamento pode ser representado como uma convolução!**
- Seja $\mathbf{I}$ uma imagem e $\mathbf{g}$ um kernel. A saída da convolução de $\mathbf{I}$ com $\mathbf{g}$, denotada por $\mathbf{I} * \mathbf{g}$:

$$\mathbf{f}[m,n] = \mathbf{I} * \mathbf{g} = \sum_{k,j} \mathbf{I}[m-k, n-l]\mathbf{g}[k,l] \tag{5}$$

Convolução Discreta 2D: Exemplos de Aplicação de Máscara

- Para uma filtragem linear, a resposta do filtro é dada pela soma dos produtos dos pontos da imagem que são cobertos pela máscara;

I_1	I_2	I_3
I_4	I_5	I_6
I_7	I_8	I_9

G_1	G_2	G_3
G_4	G_5	G_6
G_7	G_8	G_9

O pixel central selecionado é substituído por:

$$f(x, y) = \sum_i I_i g_i \tag{6}$$

VÍDEO + EXERCÍCIO

Bordas e Gradientes

- **Bordas** em imagens em tons de cinza indicam a transição de uma média de níveis de cinza para outro. Em outras palavras, uma borda é um local onde há **rápida mudança na função intensidade** de uma imagem;
- Portanto, detecção de bordas consiste na **identificação de mudanças (descontinuidades) na imagem**;
- **O gradiente aponta para a direção da mudança de intensidade mais rápida!**
- Cálculo de gradiente:

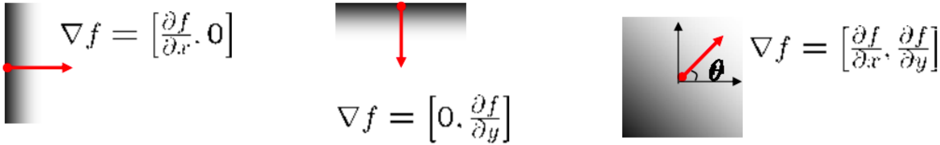
$$\nabla F = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{7}$$

- A magnitude do gradiente é dada por:

$$mag(\nabla F) = [G_x^2 + G_y^2]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{8}$$

- Um valor aproximado da magnitude é dado por: $|G_x| + |G_y|$;

Bordas e Gradientes



- Portanto, **operadores gradientes realçam bordas**! E.g.: Prewitt, Roberts, Sobel, Canny;
- Para uma função 2D temos a seguinte aproximação:

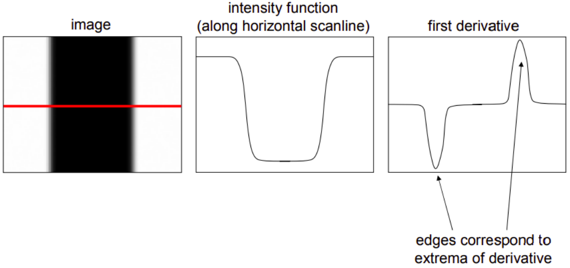
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{f(x+\varepsilon, y)}{\varepsilon} - \frac{f(x, y)}{\varepsilon} \right) \approx \frac{f(x_{n+1}, y) - f(x_n, y)}{\Delta x} \tag{9}$$

Bordas e Gradientes - Derivadas Digitais

- Derivada primeira:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f(x+1) - f(x) \tag{10}$$

- 0 para segmentos com níveis de cinza constante;
- Diferentes de zero em início de degraus e rampas;
- Diferente de zero em rampas;
- e desta forma as derivadas são capazes de resssaltar as informações da borda;



- Observe que trata-se de uma operação **linear** e **invariante a deslocamento**, logo é **resultado de uma convolução**!

- O gradiente em imagem RGB é definido como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial x}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial x}\mathbf{b}; \\
\mathbf{v} &= \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{r} + \frac{\partial G}{\partial y}\mathbf{g} + \frac{\partial B}{\partial y}\mathbf{b} \\
g_{xx} = \mathbf{u}^T\mathbf{u} &= \left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial x}\right|^2 \\
g_{yy} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} &= \left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2 + \left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|^2 \\
g_{xy} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} &= \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- É o mais antigo e o mais simples detector de bordas:

$$
\begin{aligned}
h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
|\nabla f(x,y)| \approx \sqrt{(f * h_1)^2 + (f * h_2)^2}
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Filtros de Diferenças Finitas / Gradientes - Gradiente Cruzado de Roberts: Matlab/Octave

IMPLEMENTAÇÃO

- Varre a imagem;
- Calcula a máscara horizontal (p_h) e máscara vertical (p_v) para cada ponto da imagem:

$$p_h = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ; p_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

- calcula o resultado $\sqrt{P_h^2 + P_v^2}$ para cada ponto e gera uma nova imagem;
- O resultado serão as bordas dos objetos presentes na imagem.

$$g(x, y) \approx \sqrt{P_h^2 + P_v^2} \tag{14}$$

Filtros de Diferenças Finitas / Gradientes - Filtro de Prewitt: Matlab/Octave

IMPLEMENTAÇÃO

- Varre a imagem;
- Calcula a máscara horizontal (s_h) e máscara vertical (s_v) para cada ponto da imagem;

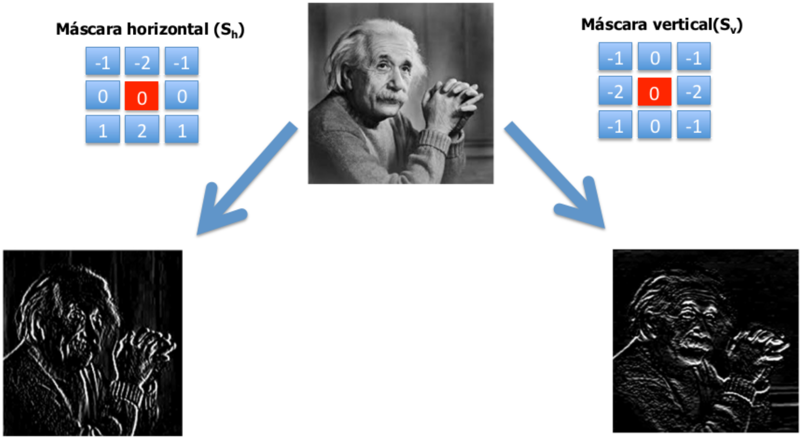
$$s_h = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; s_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

- calcula o resultado $\sqrt{S_h^2 + S_v^2}$ para cada ponto e gera uma nova imagem;
- O resultado serão as bordas dos objetos presentes na imagem.

$$g(x, y) \approx \sqrt{S_h^2 + S_v^2} \tag{16}$$

IMPLEMENTAÇÃO

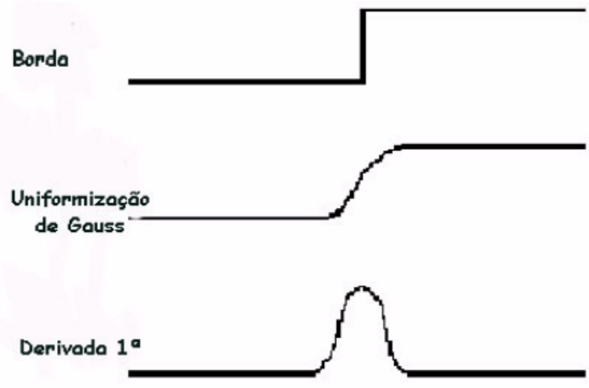
Filtros de Diferenças Finitas / Gradientes - Máscaras Horizontais e Verticiais



Detector de Bordas de Canny

- O detector de bordas de Canny é um filtro de convolução f que uniformiza o ruído e localiza as bordas;
- Se considerarmos uma borda de uma dimensão variando no contraste e então convoluindo a borda com a uniformização de Gauss variando no contrste e então convolucionando a borda com a uniformização de Gauss, o resultado será uma variação contínua do valor inicial ao final, com uma inclinação máxima no ponto onde existe um "degrau";
- Se esta continuidade é diferenciada em relação a x, esta inclinação máxima será o máximo da nova função original.

Detector de Bordas de Canny



Detector de Bordas de Canny

- Os máximos da convolução da máscara e da imagem indicarão bordas na imagem. Este processo pode ser realizado através do uso de uma função de Gauss na direção x e y;

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x/2\sigma} \tag{17}$$

$$G'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-x/2\sigma} \tag{18}$$

- Convolucionandno a imagem com G' obteremos uma imagem I que mostrará as bordas, mesmo na presença de ruído;
- A convolução é relativamente simples de ser implementada, mas é cara computacionalmente, especialmente em 2D. Entretanto, uma convolução de Gauss 2D pode ser separada em duas convoulçoes de Gauss 1D. Uma forma fácil de fazer convolução é percorrer a imagem iniciando sempre um pixel a frente em todas as laterais.

Dúvidas?